

Komplex számok

A komplex számok bevezetése. Algebrai alak

Az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet megoldásai nem valósak. A $\sqrt{-1}$ értékének megadhatóságához számkört kell bővíteni.

Definíció: Komplex számnak nevezzük az $(a; b)$ valós számokból álló rendezett számpárt.

Jelölés: $\mathbb{C}$.

Megjegyzés: $(a; b) = (c; d)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a = c$ és $b = d$.

Műveletek a komplex számok körében:

Összeadás: $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$ – kommutatív, asszociatív;

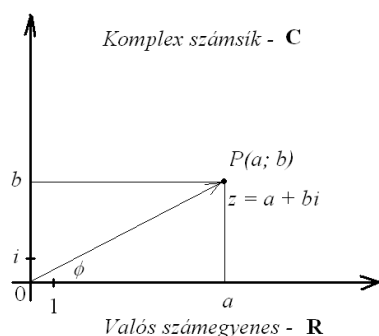
Kivonás: $(a; b) - (c; d) = (a - c; b - d)$;

Szorzás: $(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$ – kommutatív, asszociatív, disztributív.

Osztás: $(a; b) : (c; d) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}; \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$.

Jelölés: A $(0; 1)$ komplex számot i -vel jelöljük (képzetes egység). Ekkor az $(a; b)$ komplex szám $a + bi$ alakban írható (algebrai alak), ahol a valós rész, b a képzetes rész.

Szemléltetés: a komplex számsíkon:



Megjegyzések, jelölések:

- $i^2 = -1$
- $z = a + bi$
- $a = \operatorname{Re} z$
- $b = \operatorname{Im} z$
- valós számok képzetes része 0

Műveletek komplex számokkal

a) Konjugált

Definíció: A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltja a $\bar{z} = a - bi$ komplex szám.

Összefüggések: $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Tétel: Két komplex szám konjugáltja akkor és csak akkor egyenlő, ha a két komplex szám is egyenlő. Ha egy komplex szám megegyezik konjugáltjával, akkor az a szám valós.

b) Abszolút érték

Definíció: A $z = a + bi$ komplex szám abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Tétel: Komplex számok abszolút értékére teljesülnek az alábbiak:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}; |z| = |\bar{z}|; |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; |z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2||; |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

c) Összevonás

Definíció: A $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$ komplex számok esetén
 $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) \cdot i$.

d) Szorzás

Definíció: A $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$ komplex számok esetén
 $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i$.

e) Osztás

Definíció: A $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$ komplex számok esetén
 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i$.

Komplex számok trigonometrikus alakja

Definíció: A z komplex szám trigonometrikus alakja $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ahol $r = |z|$ és φ a komplex szám argumentuma (irányszöge).

Műveletek trigonometrikus alakkal

$$\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

Mint hogy a komplex szám trigonometrikus alakja kéttényezős szorzat, a trigonometrikus alak nem alkalmas összeadás és kivonás elvégzésére, viszont annál inkább használható komplex számok szorzatának, hányadosának, hatványainak és gyökeinek kiszámítására.

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ és } z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \text{ ahol } n \text{ egész szám (Moivre-képlet)}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \text{ ahol } k = 0; 1; \dots; n-1$$

Egységgyökök

Definíció: Mindazokat a számokat, amelyek n -edik hatványa 1, n -edik egységgyököknek nevezzük és $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ -gyel jelöljük.

Mivel a $z=1$ komplex szám trigonometrikus alakja $1=1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$, ezért az összes n -edik egységgyök a következő:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \frac{2k\pi}{n}$$

Az n -edik egységgyökök az origó körüli egységsugarú körön, az n -oldalú szabályos sokszög csúcspontjainál helyezkednek el, és az egyik csúcspont a valós tengely 1 pontja.