

Függvények

Függvények definíciója, tulajdonságai

Definíció: Adott két (nem üres) halmaz, az A és a B . Ha az A halmaz minden egyes eleméhez valamilyen módon (de egyértelműen) hozzárendeljük a B halmaznak egy-egy elemét, akkor a hozzárendelést függvénynek (leképezésnek) nevezzük. Az A halmaz a függvény értelmezési tartománya. Jele: D_f . A B halmaz a függvény értékkészlete. Jele: R_f .

Definíció: Legyen az f függvény által létesített leképezés kölcsönösen egyértelmű. Az f függvény inverz függvényén értjük azt az $\bar{f}$ függvényt, amelynek értelmezési tartománya az f értékkészlete, és a teljesül minden $x_0 \in R_f$ -re, hogy $f(\bar{f}(x_0)) = x_0$.

Definíció: Egy függvénynek egy adott x_0 értelmezési tartománybeli eleme zérushelye, ha az x_0 -hoz tartozó függvényérték nulla. ($f(x_0) = 0$)

Definíció: Egy függvény szigorúan monoton növekedő, ha minden x_1 és x_2 értelmezési tartománybeli elem esetén, ahol $x_1 < x_2$ a függvényértékekre a következő igaz: $f(x_1) < f(x_2)$. (Monoton növekedő, ha $f(x_1) \leq f(x_2)$.)

Definíció: Egy függvény szigorúan monoton csökkenő, ha minden x_1 és x_2 értelmezési tartománybeli elem esetén, ahol $x_1 < x_2$ a függvényértékekre a következő igaz: $f(x_1) > f(x_2)$. (Monoton csökkenő, ha $f(x_1) \geq f(x_2)$.)

Definíció: A függvénynek egy adott x_0 értelmezési tartománybeli helyen minimuma van, ha $f(x_0)$ függvényértéknél nincs kisebb. Az x_0 a minimum hely, az $f(x_0)$ minimum érték.

Definíció: A függvénynek egy adott x_0 értelmezési tartománybeli helyen maximuma van, ha $f(x_0)$ függvényértéknél nincs nagyobb. Az x_0 a maximum hely, az $f(x_0)$ maximum érték.

Definíció: Az f függvény periodikus és periódusa p , ha minden x értelmezési tartománybeli elem esetén $x + kp$ is értelmezési tartománybeli elem, és $f(x) = f(x + kp)$, ahol k akármilyen egész szám lehet.

Definíció: Az f függvény páros, ha minden x értelmezési tartománybeli elem esetén $-x$ is értelmezési tartománybeli elem, és $f(-x) = f(x)$.

Definíció: Az f függvény páratlan, ha minden x értelmezési tartománybeli elem esetén $-x$ is értelmezési tartománybeli elem, és $f(-x) = -f(x)$.

Definíció: Az f függvény az $]a; b[\subseteq D_f$ intervallumon konvex, ha bármely $x_1, x_2 \in]a; b[$ és bármely $\lambda \in [0; 1]$ esetén igaz lesz az, hogy $f(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2) \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2)$.

Definíció: Az f függvény az $]a; b[\subseteq D_f$ intervallumon konkáv, ha bármely $x_1, x_2 \in]a; b[$ és bármely $\lambda \in [0; 1]$ esetén igaz lesz az, hogy $f(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2) \geq \lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2)$.

Definíció: Az f függvénynek $x_0 \in D_f$ inflexiós pontja, ha van olyan δ pozitív valós szám, hogy a függvény az $]x_0 - \delta; x_0[$ intervallumon konvex, az $]x_0; x_0 + \delta[$ intervallumon pedig konkáv. (Természetesen fordítva is előfordulhat: előbb konkáv, aztán konvex.)

Nevezetes függvények

- (1) Konstansfüggvények: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto c$
- (2) Lineáris függvények: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto ax + b$
- (3) Abszolút érték függvények: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto a \cdot |bx + c| + d$
- (4) Másodfokú függvények: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c$
- (5) Elsőfokú törtfüggvények: $f: \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$
- (6) Hatványfüggvények: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
- (7) Gyökfüggvények: $f: D \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto a \cdot \sqrt[n]{x + b} + c$
- (8) Egészrész függvény: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto [x]$
- (9) Tötrész függvény: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \{x\}$
- (10) Szignum függvény Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$
- (11) Trigonometrikus függvények
 - a) Sinusfüggvény: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \sin x$
 - b) Cosinusfüggvény: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \cos x$
 - c) Tangensfüggvény: $f: D \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \operatorname{tg} x$
 - d) Cotangensfüggvény: $f: D \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \operatorname{ctg} x$
- (12) Ciklometrikus függvények, a trigonometrikus függvények inverzei
 - a) Arcus sinus: $f: [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], x \mapsto \arcsin x$
 - b) Arcus cosines: $f: [-1; 1] \rightarrow [0; \pi], x \mapsto \arccos x$
 - c) Arcus tangens: $f: \mathbf{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, x \mapsto \operatorname{arctg} x$
 - d) Arcus cotangens: $f: \mathbf{R} \rightarrow]0; \pi[, x \mapsto \operatorname{arcctg} x$
- (13) Exponenciális függvények: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto a^x, a \in \mathbf{R}, 0 < a, a \neq 1$
- (14) Logaritmikus függvények: $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \log_a x, a \in \mathbf{R}, 0 < a, a \neq 1$
- (15) Hiperbolikus függvények és inverzeik

Definíciók:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

Tétel: Tetszőleges valós szám sinus és cosinus hiperbolicusa között fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x; \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

- a) Sinus hiperbolicus: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \operatorname{sh} x$
- b) Cosinus hiperbolicus: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \operatorname{ch} x$
- c) Tangens hiperbolicus: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \operatorname{th} x$
- d) Cotangens hiperbolicus: $f: \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \operatorname{cth} x$
- e) Area sinus hiperbolicus: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \operatorname{arsh} x$
- f) Area cosinus hiperbolicus: $f: \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \operatorname{arch} x$
- g) Area tangens hiperbolicus: $f:]-1; 1[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \operatorname{arth} x$
- h) Area cotangens hiperbolicus: $f:]-\infty; -1[\cup]1; \infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \operatorname{arcth} x$

Függvények folytonossága

Definíció (Heine-féle): Az f függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha f az x_0 szimmetrikus környezetében értelmezve van, és minden olyan $\{x_n\}$ sorozatra ($x_n \in D_f$), amely x_0 -hoz tart ($x_n \rightarrow x_0$), az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata az $f(x_0)$ függvényértékhez tart ($f(x_n) \rightarrow f(x_0)$).

Definíció (Cauchy-féle): Az f függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha bármely pozitív ε -hoz megadható olyan pozitív δ (a δ az ε -tól és az x_0 -tól függ), hogy $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\subset D_f$, és ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Megjegyzés: Ezek a definíciók annak a megfogalmazásnak adnak pontos értelmet, miszerint ha az x elég közel van x_0 -hoz, akkor $f(x)$ elég közel van $f(x_0)$ -hoz.

Definíció (Heine-féle): Az f függvényt az x_0 -ban balról (illetve jobbról) folytonosnak nevezzük, ha f az x_0 megfelelő félkörnyezetében értelmezett és bármely olyan x_0 -hoz konvergáló sorozat esetén, amelynek elemeire $x_n < x_0$ (illetve $x_n > x_0$) igaz, hogy $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Természetesen $x_0, x_n \in D_f$.

Definíció (Cauchy-féle): Az f függvényt az x_0 -ban balról (illetve jobbról) folytonosnak nevezzük, ha f az x_0 megfelelő félkörnyezetében értelmezett és bármely $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan pozitív δ (a δ az ε -tól és az x_0 -tól függ), hogy ha $x < x_0$ (illetve $x > x_0$) és $x_0 - x < \delta$ (illetve $x - x_0 < \delta$), akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Természetesen $x_0, x_n \in D_f$.

Tétel: Az f függvény egy x_0 pontban akkor és csak akkor folytonos, ha x_0 -ban balról is és jobbról is folytonos.

Tétel: Ha f és g függvények folytonosak egy x_0 pontban, akkor összegük ($f(x) + g(x)$), különbségük ($f(x) - g(x)$), szorzatuk ($f(x) \cdot g(x)$), hányadosuk $\left(\frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0 \right)$, kompozíciójuk ($f \circ g, f(g(x))$, itt f a $g(x_0)$ helyen folytonos) is folytonos.

Intervallumokon folytonos függvények

Definíció: Az f függvényt egy nyílt intervallumon folytonosnak nevezzük, ha az intervallum minden pontjában folytonos.

Definíció: Az f függvényt egy zárt intervallumon folytonosnak nevezzük, ha az intervallum minden belső pontjában folytonos, a bal végpontban jobbról, a jobb végpontban pedig balról folytonos.

Definíció: Egy függvényt folytonosnak nevezzük, ha az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

Definíció: Az f függvényt valamely I intervallumon egyenletesen folytonosnak nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta > 0$ (δ csak ε -tól függ, a helytől nem), hogy minden olyan $x_1, x_2 \in I$ esetén, amelyre $|x_1 - x_2| < \delta$ teljesül, hogy $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Tétel (Bolzano-tulajdonság): Egy intervallumon folytonos függvény ezen intervallum bármely két pontjában felvett értékei közé eső bármely értéket felvesz ezen két hely között.

Tétel: Zárt intervallumon folytonos függvény korlátos ezen az intervallumon.

Tétel (Weierstrass): Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi minimumát és maximumát.

Tétel: Zárt intervallumon folytonos függvény egyenletesen is folytonos ezen az intervallumon.

Függvények határértéke

Definíció (Heine-féle): Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény x_0 -beli határértéke az A szám, ha bármely $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \in D_f$, $x_n \neq x_0$) sorozatra a megfelelő függvényértékek $\{f(x_n)\}$ sorozata A -hoz konvergál. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Definíció (Cauchy-féle): Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény x_0 -beli határértéke az A szám, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$ (δ az ε -től és x_0 -tól függ), hogy ha $|x - x_0| < \delta$ ($x \neq x_0$), akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Természetesen $x \in D_f$.

Definíció (Heine-féle): Legyen az f függvény az x_0 pont valamely jobb, illetve bal oldali félkörnyezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény x_0 -beli jobb, illetve bal oldali határértéke az A szám, ha bármely $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \in D_f$, $x_n \neq x_0$) és $x_0 < x_n$, illetve $x_n < x_0$ sorozatra a megfelelő függvényértékek $\{f(x_n)\}$ sorozata A -hoz konvergál.

Definíció (Cauchy-féle): Legyen az f függvény az x_0 pont valamely jobb, illetve bal oldali félkörnyezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény x_0 -beli jobb, illetve bal oldali határértéke az A szám, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$ (δ az ε -től és x_0 -tól függ), hogy ha $x_0 < x < x_0 + \delta$, illetve $x_0 - \delta < x < x_0$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Természetesen $x \in D_f$.

A féloldali határértékek jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ (jobb oldali) és $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$ (bal oldali).

Tétel: Az f függvénynek egy x_0 pontban akkor és csak akkor létezik a határértéke, ha ott létezik a jobb és bal oldali határértéke és ezek egyenlők: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Tétel: Ha $f(x) \geq 0$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ létezik, akkor $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$.

Tétel: Ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ létezik, akkor az x_0 helyen f és g függvény összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának létezik a határértéke, és

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad g(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.\end{aligned}$$

Tétel: Ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ létezik, valamint az x_0 valamely környezetében $f(x) \geq g(x)$, akkor $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Tétel: Az f függvénynek egy x_0 pontban akkor és csak akkor létezik a határértéke, ha $\{f(x_n)\}$ sorozat konvergens, valahányszor $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \in D_f$, $x_n \neq x_0$).

Tétel: Az f függvény az x_0 pontban akkor és csak akkor folytonos, ha létezik a határértéke és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definíció (Heine-féle): Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor az f függvénynek az x_0 pontban $+\infty$ ($-\infty$) a határértéke, ha bármely $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \in D_f$, $x_n \neq x_0$) sorozatra $f(x_n) \rightarrow +\infty$ ($-\infty$).

Definíció (Cauchy-féle): Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor az f függvénynek az x_0 pontban $+\infty$ ($-\infty$) a határértéke, ha bármely M számhoz létezik olyan $\delta > 0$ (δ az M -től és x_0 -tól függ), hogy ha $|x - x_0| < \delta$ ($x \neq x_0$), akkor $f(x) > M$ ($f(x) < M$) teljesül. Természetesen $x \in D_f$.

A végtelen határérték jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Definíció (Heine-féle): Az f függvénynek a plusz (a mínusz) végtelenben a határértéke A , ha bármely ($x_n \in D_f$) $x_n \rightarrow +\infty$ ($x_n \rightarrow -\infty$) sorozat esetén $f(x_n) \rightarrow A$.

Definíció (Cauchy-féle): Az f függvénynek a plusz (a mínusz) végtelenben a határértéke A , ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan x^* (x^* függvénye ε -nak), hogy ha $x > x^*$ ($x < x^*$), akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Természetesen $x \in D_f$.

A végtelenben vett határérték jelölése: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

Definíció (Heine-féle): Az f függvénynek a plusz (a mínusz) végtelenben a határértéke $+\infty$ illetve $-\infty$, ha bármely ($x_n \in D_f$) $x_n \rightarrow +\infty$ ($x_n \rightarrow -\infty$) sorozat esetén $f(x_n) \rightarrow +\infty$, illetve $f(x_n) \rightarrow -\infty$.

Definíció (Cauchy-féle): Az f függvénynek a plusz (a mínusz) végtelenben a határértéke $+\infty$ illetve $-\infty$, ha bármely M számhoz van olyan x^* szám (x^* függvénye M -nek), hogy ha $x > x^*$ ($x < x^*$), akkor $f(x) > M$, illetve $f(x) < M$. Természetesen $x \in D_f$.

A végtelenben vett végtelen határérték jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Néhány érdekesebb függvény érdekes határértéke a következő:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0, \text{ ha } k > 0, a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0, \text{ ha } k > 0$$