

Halmazok

A halmaz fogalma

A halmaz és a halmaz eleme alapfogalom, nem definiáljuk őket.

Jelölés: $A, B, C, \mathbf{N}$, valamint $a \in A, b \notin A$

Megadás: az elemek felsorolásával vagy az elemek pontos körülírásával

Példa: $A = \{0; 1; 2\}, B = \{\text{prímszámok}\}, C = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq \sqrt{2}\}$

Definíció: Az üres halmaz olyan halmaz, amelynek egyetlen eleme sincs. Jelölés: $\emptyset$.

Nevezetes számhalmazok: természetes számok halmaza – $\mathbf{N}$; egész számok halmaza – $\mathbf{Z}$; racionális számok halmaza – $\mathbf{Q}$; valós számok halmaza – $\mathbf{R}$; komplex számok halmaza – $\mathbf{C}$.

Definíció: Az A és B halmazok egyenlők, ha elemeik megegyeznek. Jelölés: $A = B$.

Definíció: Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha A minden eleme eleme B -nek is. Jelölés: $A \subseteq B$. Az A halmaz valódi részhalmaza a B halmaznak, ha A minden eleme eleme B -nek is (azaz részhalmaza), de B -nek van olyan eleme, amely nem eleme A -nak (azaz nem egyenlők). Jelölés: $A \subset B$.

Példa: $\{-1; 1\} \subseteq \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = 1\}$ és $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$

Minden halmaznak részhalmaza saját maga és az üres halmaz is.

Megjegyzés: Egy n -elemű halmaz k -elemű ($k \leq n$) részalmazainak száma $\binom{n}{k}$.

Tétel: Az n -elemű halmaz összes részalmazainak száma 2^n .

Megjegyzés: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Definíció: Egy halmaz (különböző) elemeinek számát a halmaz számosságának nevezzük.

Jelölés: $|A|$. Eszerint egy halmaz vagy véges vagy végtelen.

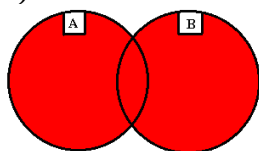
Példa: $\{2; 3; 5; 7\}$ véges halmaz, a prímszámok halmaza végtelen.

Megjegyzés: $|\mathbf{N}| = |\mathbf{Z}| = |\mathbf{Q}|$, ezek megszámlálhatóan végtelen halmazok. $\mathbf{R}$ kontinuum számosságú ($|\mathbf{N}| < |\mathbf{R}|$). A véges halmazok számosságát nevezzük természetes számnak.

A halmazok szemléltetése Venn-diagrammal történik.

Műveletek halmazokkal

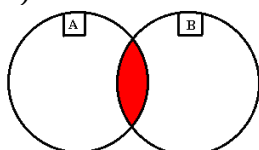
a) Unió: $A \cup B$



Definíció: Két halmaz uniója azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek vagy az egyik vagy a másik halmaznak elemei.

Tulajdonságok: kommutatív ($A \cup B = B \cup A$), asszociatív ($(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$).

b) Metszet: $A \cap B$



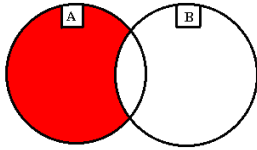
Definíció: Két halmaz metszete azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek mind a két halmaznak elemei.

Tulajdonságok: kommutatív ($A \cap B = B \cap A$), asszociatív ($(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$).

Disztributivitás: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ és $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Definíció: Két halmaz diszjunkt, ha a metszetük az üres halmaz. ($A \cap B = \emptyset$)

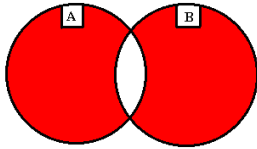
c) Különbség: $A \setminus B$



Definíció: Két halmaz különbsége azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek csak az első halmaznak elemei.

Tulajdonságok: nem kommutatív, nem asszociatív.

d) Szimmetrikus differencia: $A \Delta B$

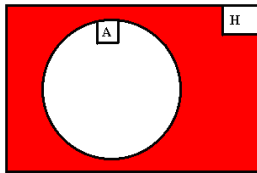


Definíció: Két halmaz szimmetrikus differenciája azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek vagy az egyik vagy a másik halmaznak elemei, de egyszerre egyik halmaznak sem elemei.

Tulajdonságok: kommutatív ($A \Delta B = B \Delta A$), asszociatív $((A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C))$.

Megjegyzés: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

e) Komplementer: $\overline{A_H}$



Definíció: Az A halmaznak a H alaphalmazra vonatkozó komplementere a $H \setminus A$ halmaz.

De Morgan-azonosságok: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

f) Descartes-szorzat: $A \times B$

Definíció: Az A és B halmazok Descartes-féle szorzata az $(a; b)$ rendezett elempárok szorzata, ahol $a \in A$ és $b \in B$, azaz $A \times B = \{(a; b) | a \in A, b \in B\}$.