

Sorok

Numerikus sorok definíciója, tulajdonságai

Definíció: Legyen adott egy $\{a_n\}$ számsorozat. Az $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ szimbólummal megadott végtelen sok tagú összeget végtelen numerikus sornak nevezzük.

Példa: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

Definíció: A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor első k tagjának összegét, azaz az $s_k = a_1 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^k a_n$ összeget a numerikus sor k -adik részletösszegének nevezzük.

Megjegyzés: A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor részletösszegei egy $\{s_n\}$ sorozatot alkotnak, ahol $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$

Definíció: A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata konvergens. A részletösszegek $\{s_n\}$ sorozatának határértékét a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor összegének nevezzük.

Definíció: Egy numerikus sort divergensnek nevezünk, ha nem konvergens.

Definíció: A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a tagjainak abszolút értékéből képzett $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$ sor konvergens.

Tétel: Ha egy numerikus sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.

Tétel: Ha egy sor konvergens, akkor általános tagja nullához tart. (Azaz, ha egy általános tag nem tart nullához, akkor a belőle képzett sor nem lehet konvergens.)

Nevezetes sorok

Mértani sor: $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$

□ ha $|q| < 1$, akkor konvergens, és az összeg $\frac{a}{1-q}$;

□ ha $|q| \geq 1$, akkor divergens;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = +\infty, \text{ a harmonikus sor divergens}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots = +\infty, \text{ a prímszámok reciprokából álló sor divergens}$$

Konvergenciakritériumok pozitív tagú sorokra

Definíció: A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor pozitív tagú sor, ha minden n pozitív egész szám esetén $a_n > 0$.

Definíció: Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitív tagú sorok tagjai között olyan kapcsolat van, hogy az egyik sor tagjai véges sok tag kivételével rendre nem nagyobbak a másik sor megfelelő tagjainál, azaz $a_n \leq b_n$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sort a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor majoráns sorának ($\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ majorálja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ -t), a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor minoráns sorának ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ minorálja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ -t) nevezzük.

Tétel (Majoráns kritérium): Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor majoráns sora a konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitív tagú sor, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.

Tétel (Minoráns kritérium): Ha egy $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitív tagú sor minoráns sora egy divergens $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergens.

Tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium): Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, és ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens is, divergens is lehet, nem lehet eldönteni.

Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium): Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, és ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens is, divergens is lehet, nem lehet eldönteni.