

Szélsőérték-feladatok

1. Az $a = 8$ számot bontsuk fel két pozitív összeadandóra úgy, hogy a tagok
 - a) szorzata;
 - b) négyzetösszege;
 - c) négyzetének különbsége;
 - d) köbeinek összege(amennyiben az lehetséges) szélsőértéket vegyen fel!
2. Ossza fel a 4-et (az A számot) két részre úgy, hogy az egyik rész négyzetének és a másik rész köbének összege maximális (minimális) legyen!
3. Felbontható-e a 12 két részre úgy, hogy a részek köbének az összege maximális vagy minimális legyen?
4. Felbontható-e az 1 két szám összegére úgy, hogy a részek köbének a különbsége maximális vagy minimális legyen?
5. Felbontható-e az 1 két nemnegatív szám összegére úgy, hogy a részek negyedik hatványának a különbsége maximális vagy minimális legyen?
6. Legyen $x, y, z > 0$, és $x + y + z = 180$, valamint $x : y = 1 : 2$. Mi az $x \cdot y \cdot z$ szorzat maximuma?
7. Adott egy 1×1 méteres kartonlap, amelynek mind a négy sarkából levágunk egy-egy ugyanolyan négyzetet. Az így kapott alakzatból egy (fedetlen) dobozt tudunk hajtogatni. Milyen oldalhosszú négyzeteket vágjunk le a kartonlap négy sarkából, hogy a lehető legnagyobb térfogatú dobozt kapjuk.
8. Egy négyzet alakú lemez sarkairól egybevágó négyzeteket vágunk le. Mekkora legyenek a levágott négyzetek, hogy az oldaltéglalapok felhajtatásával létrejött nyitott doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen? (A lemez oldalait vegyük pl. 24 cm hosszúnak.)
9. Egy felül nyitott négyzet alapú doboz készítéséhez 2 m^2 területű lemezt használtunk fel. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy a térfogata a lehető legnagyobb legyen? Mekkora ez a térfogat?
10. Határozza meg a 2π térfogatú hengerek közül a minimális felszínűt!
11. Milyen méretei vannak a legkisebb felszínű 1 dm^3 térfogatú henger alakú konzervdoboznak?
12. Határozzuk meg annak a maximális térfogatú egyenes hengernek a méreteit, amelynek tengelymetszete 6 m kerületű!
13. Határozzuk meg adott S felszínű egyenes körhengerek közül a legnagyobb térfogatú sugarát!
14. Egy felül nyitott, henger alakú $0,5 \text{ l}$ térfogatú mérőedényt akarunk készíteni. Hogyan válasszuk meg az edény alapsugarát és magasságát, hogy minél kevesebb lemezt használjuk föl, és mennyi lesz ez a felhasznált lemezmennyiség?
15. A 3 egységnyi alkotójú egyenes körkúpok közül határozza meg a maximális térfogatút!
16. Adott egy R sugarú körlap (itatóspapírból). Mekkora középpontú szögű körcíkket vágjunk ki belőle, hogy az abból készíthető tölcsér alakú szűrő maximális térfogatú legyen?
17. Határozza meg az adott a alkotójú legnagyobb térfogatú kúp magasságát és alapkörének sugarát!
18. Határozza meg az R sugarú gömbbe írt maximális térfogatú kúp alkotóját és magasságát!
19. Adott r sugarú és m magasságú egyenes henger köré írjunk minimális térfogatú kúpot!

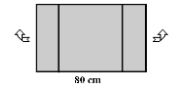
20. Egyenes kúpba írható hengerek közül melyiknek a palástja a legnagyobb területű?
21. Adott P palástú sátrak (egyenes körkúpok) közül válasszuk ki a legnagyobb térfogatút!
22. Határozzuk meg adott R sugarú gömbbe írt egyenes körkúpok közül a legnagyobb térfogatút!
23. Írjunk adott gömb köré minimális térfogatú
 - a) kúpot;
 - b) csonkakúpot!
24. Egy forgáshenger sugarának és magasságának az összege 24 cm. Válassza meg az adatokat úgy, hogy a henger térfogata maximális legyen!
25. Az 1000 cm^2 felszínű, felül nyitott hengerek közül a maximális térfogatúnak mekkora a sugara? Mekkora ez a maximális térfogat?
26. Határozzuk meg adott felszínű fedetlen hengerek közül a legnagyobb térfogatút!
27. Határozza meg adott R sugarú gömbbe írt egyenes hengerek közül azt, amelyiknek legnagyobb a
 - a) térfogata;
 - b) palástjának területe!
28. Igazolja, hogy ha valamely R sugarú és M magasságú egyenes körkúpba maximális térfogatú hengert írunk, akkor annak r sugara és m magassága eleget tesz az $r = \frac{2}{3}R$ és $m = \frac{2}{3}M$ feltételeknek!
29. Írjunk maximális felszínű egyenes hengert adott R sugarú
 - a) félgömbbe;
 - b) gömbbe!
30. Négy darab 1 m hosszú rúdból négyzetes alapú, egyenes alakú sátorvázat készítünk. Mekkora alapterület esetén lesz a sátor térfogata maximális?
31. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 18 cm, magassága 40 cm. Szabályos négyoldalú hasábokat írunk bele úgy, hogy a hasáb alaplappja a gúla alaplappján, a hasáb fedőlapjának csúcsai pedig a gúla oldaléleire legyenek. A hasábok közül melyik a legnagyobb térfogatú?
32. Határozza meg a 108 dm^2 felszínű, felül nyitott négyzet alapú egyenes hasábok közül a maximális térfogatú hasáb méreteit és térfogatát!
33. Azok közül a téglalapok közül, amelyek egyik csúcsába futó éleinek összege s , melyiknek lesz a legnagyobb a térfogata? Mekkora ez a maximális térfogat?
34. Ismert tény, hogy egy gerenda szilárdsága egyenesen arányos a keresztmetszet hosszúságával és szélességének a négyzetével. Határozzuk meg a d cm átmérőjű hengeres fatörzsből készíthető legszilárdabb gerenda keresztmetszetének a méreteit!
35. Milyen méretekkel készüljön az a 32 m^3 térfogatú négyzetes oszlop alakú medence, amelynek elkészítéséhez (alap- és oldallapjaihoz) a lehető legkevesebb anyag szükséges?
36. Vizsgáljuk az F felszínű négyzetes hasáb térfogatát, mint az alapél függvényét. Hol van, és milyen típusú szélsőértéke?
37. Határozza meg annak a 60 egységnyi kerületű téglalapnak a területét, amelynek az átlói a lehető legrövidebbek!
38. Egyenlő területű téglalapok közül melyiknek legnagyobb a kerülete?
39. Az r sugarú körbe írható derékszögű négyszögek közül melyiknek legnagyobb a területe?
40. Egy tűzfal mellett 600 m^2 -es, téglalap alakú területet akarunk elkeríteni. Csak három oldalon kell kerítést készítenünk, mert a negyedik oldal a tűzfal. Hogyan válasszuk

- meg a téglalap hosszúságát és szélességét, hogy a kerítés hossza a legkisebb legyen, és mekkora ez a minimális hossz?
41. Egy derékszögű háromszög oldalhosszúságainak a négyzetösszege 50 cm^2 . Mekkora válasszuk az oldalakat, hogy a háromszög területe maximális legyen?
 42. Egyenlő kerületű derékszögű háromszögek közül melyiknek a legkisebb az átfogója?
 43. Határozza meg a $2a$ alapú, m magasságú egyenlő szárú háromszögbe rajzolható maximális területű téglalap magasságát!
 44. Egy téglalap oldalai 5 és 4 cm hosszúak. Köréje olyan egyenlő szárú háromszöget szerkesztünk, amelynek alapja az 5 cm -es oldalra esik, szárai pedig átmennek a téglalap másik két csúcsán. Mekkora legyen az egyenlő szárú háromszög magassága, hogy a területe a legkisebb legyen? Mekkora a minimális terület?
 45. Adott egy a átfogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszög. A háromszög egyik befogóján jelöljük ki egy tetszőleges P pontot., amelyen keresztül párhuzamos és merőleges egyenest húzunk az átfogóra. A keletkező derékszögű trapéz mikor lesz maximális területű? Mekkora ez a maximális területe? Ennek a trapéznak a területe hány %-a a derékszögű háromszög területének?
 46. Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 10 cm . Mekkora válasszuk a háromszög szögeit, hogy az oldalakra írt félkörök területének az összege a lehető legkisebb legyen?
 47. Tekintse azokat a téglalapokat, amelyek egyik csúcsa az origó, az ezzel szomszédos csúcsok a tengelyeken vannak, a negyedik csúcs pedig a $3x + 2y - 6 = 0$ egyenes első síknegyedébe eső részén van. Határozza meg a fenti téglalapok közül a maximális területűt!
 48. Az $y = -x^2 + 4x - 3$ egyenletű parabola és az x tengely metszéspontjait A -val és B -vel jelöljük. Határozzuk meg az x tengely fölött a parabolának az x tengellyel párhuzamos CD húrját úgy, hogy az $ABCD$ trapéz területe maximális legyen!
 49. Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola tengelypontja a $T(1; 4)$ pont, a parabolára illeszkedik az $A(0; 3)$ pont. Írjunk az x tengely által lemetszett parabolaszletbe maximális területű téglalapot! Adjuk meg a csúcsok koordinátáit!
 50. Írjunk k ($k \in \mathbf{R}$) kerületű téglalapot az $y = -x^2 + 5x - 4$ egyenletű parabola és az x tengely által határolt síkrészbe. A téglalap oldalai legyenek párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel.
 - a) A k milyen értékére van megoldás?
 - b) A k milyen értéke esetén lesz a téglalap területe maximális?
 - c) Adjuk meg a maximális területű téglalap csúcsainak koordinátáit!
 51. Írjunk be az x tengely és az $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola által határolt síkrészbe maximális területű téglalapot!
 52. Az $y^2 = 2px$ parabolát határoljuk el az $x = a$ egyenessel. Ebbe a parabolaszletbe írjunk olyan téglalapokat, amelynek középvonala a parabola tengelye. Melyik téglalap lesz maximális területű?
 53. Az ABC háromszög oldalai $AB = 42$, $BC = 40$ és $CA = 26$. Írjunk téglalapot a háromszögbe úgy, hogy a téglalap egyik oldala illeszkedjen a háromszög AB oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög CA , illetve BC oldalára essen. Tekintsük az így beírható téglalapok közül a legnagyobb területűt! Mekkora ennek a téglalapnak az oldalai?
 54. Egy 80 cm széles bádoglemez két párhuzamos szélének egyforma felhajításával téglalap keresztmetszetű vízlevezetőt készítünk úgy, hogy a víz a lehető

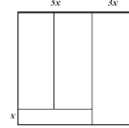
leggyorsabban folyjon át rajta. (Ez akkor következik be, ha a keresztmetszetének a területe a lehető legnagyobb.)

a) Határozza meg a felhajtott rész szélességét!

b) Határozza meg, mekkora a lehető legnagyobb keresztmetszetű területe!



55. A mellékelt tervrajzon a falak összhosszúsága 90 m, a folyosó szélessége x m. Hány méter legyen x , ha azt akarjuk, hogy a három szoba együttes területe a lehető legnagyobb legyen?



56. Egy téglalap egyik csúcsa a koordináta-rendszer origójában, további két csúcsa az x , illetve az y tengelyen van. A negyedik csúcs a $3x + 4y = 24$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Határozza meg a negyedik csúcs koordinátáit úgy, hogy a téglalap területe a lehető legnagyobb legyen!

57. Vizsgáljuk az összes olyan háromszöget, amelynek két oldala a és b . Van-e közöttük legnagyobb és legkisebb területű?

58. Adott területű és alapú háromszögnek mikor legkisebb a kerülete?

59. Egy derékszögű háromszög átfogója 20 cm hosszúságú. Határozzuk meg a két befogót úgy, hogy maximális legyen

a) a háromszög kerülete;

b) a két befogó összege!

60. Határozzuk meg valamely adott háromszögbe írt téglalapok közül a maximális területűt!

61. Határozzuk meg adott t területű téglalapok közül a legkisebb kerületűt!

62. Határozzuk meg a legnagyobb területűt az adott r sugarú

a) körbe;

b) félkörbe írt téglalapok közül!

63. Határozzuk meg az adott $2p$ kerületű téglalapok közül azt, amelynek az átlója

a) a leghosszabb;

b) a legrövidebb!

64. Egy trapéz kisebbik alapja és a szárai 1 dm hosszúak. Válaszuk meg a hiányzó oldal hosszát úgy, hogy a trapéz területe a lehető legnagyobb legyen. Mekkora ennek a trapéznek a szögei?

65. Az $r = 4\text{ cm}$ sugarú félkörbe az átmérőn fekvő, maximális területű trapézt szeretnénk írni. Hogyan kell a trapézt méretezni?

66. Válasszuk ki az adott k kerületű körök közül azt, amelynek legnagyobb a területe!

67. Egy 25 cm hosszú alagút keresztmetszete téglalapra helyezett félkör alakú. A keresztmetszet kerülete 18 cm. Hogyan kell megválasztani a félkör sugarát, hogy az alagút térfogata a lehető legnagyobb legyen?

68. Egy házra olyan ablakokat terveznek, amelyeknek alsó része téglalap alakú, felső része pedig a téglalapra illő félkör. Egy-egy ablak adott kerülete p . Hogyan kell megválasztani az ablakok méreteit, hogy minél több fényt engedjenek át?

69. Egy ablak egy a és b oldalú teljes téglalapból és egy föléje rajzolt félkörből áll, kerülete 4 m. Hogyan válasszuk meg a méreteket, hogy az ablak területe maximális legyen?

70. Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyagfogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag A értéke függ a sebességtől; az összefüggést az $A = 0,03 \cdot v^3$ képlet fejezi ki, ahol v (km/h) a sebesség. Az egyéb kiadások óránként B forintot tesznek ki. Határozzuk meg, milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen! (Vegyük B -t pl. 480 Ft-nak.)

71. A vízszinteshez képest x szögben, adott v_0 kezdősebességgel elhajítunk egy követ. A kő (ha a levegő ellenállását elhanyagoljuk) $\frac{v_0^2 \cdot \sin^2 x}{g}$ magasságra emelkedik, és vízszintes irányban $\frac{v_0^2 \cdot \sin 2x}{g}$ távolságra jut el. Milyen szögben hajítsuk a követ, hogy
- a legmagasabbra emelkedjék;
 - a legtávolabbra jusson vízszintes irányban?
72. Elhajítunk egy testet 25 m/s-os sebességgel, a vízszintessel α szöget bezáróan; a test a hajtás helyétől d távolságban ér földet. Hogyan válasszuk meg az α szöget, hogy d a lehető legnagyobb legyen? Mekkora ez a maximális távolság? (A levegő ellenállását hanyagoljuk el!)
73. Valamely AB egyenes A pontjában van egy fényforrás, amelynek erőssége α , a tőle adott d távolságra lévő B -ben pedig egy β erősségű fényforrás van. Határozzuk meg az AB szakasz legkevésbé megvilágított pontját! (Útmutatás: A megvilágítás erőssége fordítottan arányos a fényforrástól mért távolság négyzetével.)
74. Milyen magasan kell elhelyezni valamely R sugarú kör alakú futópálya közepén a lámpát, ha azt akarjuk, hogy a futópálya megvilágítása a lehető legerősebb legyen? (Útmutatás: A megvilágítás erőssége tetszőleges P pontban egyenesen arányos a beeső fénysugár és a pálya síkja hajlásszögének sinusával, és fordítottan arányos a fényforrás és a P pont távolságának négyzetével.)
75. Egy 2 m átmérőjű kerek asztal közepe fölött egy fel- és letolható lámpa van. Milyen magasra kell a lámpát helyezni, hogy az asztal körül ülők a lehető legjobban lássanak?
76. Az egymástól 600 m távolságra lévő A és B pontok között csővezetéket kell fektetni, amely közben valahol elágazik a C pont felé. A C pont az AB szakasz egyenesétől 300 m-re, az A ponttól 600 m-re van. A csővezeték az elágazásig olyan csőből készül, amelynek ára folyóméterenként 90 Ft. Az elágazástól B -ig 60 Ft/m-es, C -ig 50 Ft/m-es csövet fektetnek. Hol létesítsük az elágazást, hogy a fektetendő csővezeték ára a legkisebb legyen?
77. A lencsetörvény összefüggést állapít meg a lencse fókusz távolsága (f), a tárgytávolság (t) és a képtávolság (k) között: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$. Adott f fókusz távolság esetén milyen tárgy- és képtávolságra legkisebb a két távolság összege, és mekkora ez a minimális távolság?
78. Egy villamos telep belső ellenállása R_b , a külső R ellenállás változtatható. Az R milyen értékére lesz a külső ellenállásra jutó villamos teljesítmény a lehető legnagyobb, és mekkora ez a maximális teljesítmény? (A villamos teljesítmény $P = I^2 R$. Ha a telep forrásfeszültsége E , akkor az áramkörben folyó áram:
- $$I = \frac{E}{R_b + R}.)$$

