

Integrálszámítás

A határozatlan integrál

Legyen f az $[a; b]$ intervallumon értelmezve. Ha létezik f -hez olyan $[a; b]$ -on értelmezett F függvény, hogy minden $x \in [a; b]$ -ra $F'(x) = f(x)$, akkor azt mondjuk, hogy F az f **primitív függvénye**.

Megjegyzés: Ha F primitív függvénye f -nek, akkor $F + c$ is ($c \in \mathbf{R}$, tetszőleges) primitív függvénye f -nek.

Az f primitív függvényeinek a halmazát határozatlan integrálnak nevezzük, és így jelöljük: $\int f(x) dx$.

A határozatlan integrál néhány tulajdonsága:

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Alapintegrálok

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsh} x + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x + c, & \text{ha } |x| < 1 \\ \operatorname{arch} x + c, & \text{ha } |x| > 1 \end{cases}$$

Megjegyzések, összefüggések

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n} \text{ és } \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arch} x + c$$

Integrálási módszerek

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c, \text{ ahol } F'(x) = f(x)$$

$$\int f^n(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

$$\text{Parciális integrálás: } \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\text{Parciális törtekre bontás: } \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \right)$$

Helyettesítéses integrálás

A határozott integrál

A Newton-Leibniz.formula a következő: Ha $[a; b]$ -on f integrálható és $F'(x) = f(x)$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

A határozott integrál alkalmazásai

Területszámítás

A határozott integrál kiszámítása – gyakorlatilag.

Ívhossz-számítás

Az ívhossz a következőképpen számítható. Ha az $f : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$ függvény

deriválható, akkor f képeznek ívhossza: $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Felvínszámítás

Forgástest felvíne a következőképpen számítható. Ha az $f : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$ függvény deriválható, akkor f grafikonjának az x tengely körüli forgatásával származtatott

forgásfelület felvíne: $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Térfogatszámítás

Forgástest térfogata a következőképpen számítható. Ha az $f : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$ függvény deriválható, akkor f grafikonjának az x tengely körüli forgatásával származtatott

forgásfelület térfogata: $\pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Improprius integrál

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x) dx \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx$$